THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Monique LAGLASSE

SUR LES SOUS-ALGEBRES REDUCTIVES D'UNE ALGEBRE DE LIE

Préparée dans le Laboratoire de Mathématiques Pures, associé au CNRS,
Soutenue le 18 juin 1973 devant la Commission d'examen

B. MALGRANGE Président
J. L. KOSZUL
L. BOUCHE
D. LUNA
Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Monique LAGLASSE

SUR LES SOUS-ALGEBRES REDUCTIVES D'UNE ALGEBRE DE LIE

Préparée dans le Laboratoire de Mathématiques Pures, associé au CNRS,
Soutenue le 18 juin 1973 devant la Commission d'examen

B. MALGRANGE Président
J. L. KOSZUL
L. BOUCHE
D. LUNA
Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIB.

SOMMAIRE

pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 - GENERALITES 4

1. RAPPELS SUR LA NILPOTENCE DES ALGEBRES DE LIE ET DE LEURS REPRESENTATIONS 4

2. RAPPELS SUR LA SEMI-SIMPLICITE DES ALGEBRES DE LIE ET DE LEURS REPRESENTATIONS 6

3. QUELQUES REMARQUES CONCERNANT LE RADICAL D'UNE ALGEBRE DE LIE 7

4. COMPOSANTES SEMI-SIMPLES ET NILPOTENTES D'UN ENDOMORPHISME 8

5. EXTENSIONS 9

CHAPITRE 2 - 10

§ 1. UNE EXTENSION DU THEOREME DE MOSTOW 10

§ 2. APPLICATION DU THEOREME DE MOSTOW A L'ETUDE DES SOUS-ALGEBRES REDUCTIVES MAXIMALES DANS UNE ALGEBRE DE LIE. LE THEOREME DE LEVI..... 17

CHAPITRE 3 - 21

§ 1. ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES D'ENDOMORPHISMES 21

§ 2. ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES RELATIVEMENT A UNE REPRESENTATION DONNEE 26

§ 3. ETUDE DES ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES 28

§ 4. THEOREME D'ADO ET ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES 33

BIBLIOGRAPHIE 40

C'est grâce à Monsieur D. LUNA que ce travail a vu le jour. Il m'en a donné l'idée et m'a prodigué inlassablement son aide tout au long de sa réalisation.

Je suis reconnaissante à Monsieur J. VEY et Monsieur J.L. KOSZUL de leurs précieux conseils de rédaction.

Je suis très heureuse que Madame L. BOUCHE ait accepté de participer au jury et Monsieur B. MALGRANGE de le présider.

Mes remerciements vont enfin à Mademoiselle MARCHAND, Messieurs GAUDE et GIRARD pour la compétence et le soin qu'ils ont apportés à la réalisation matérielle de ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534920_0028

INTRODUCTION

G. D. Mostow, dans ([8]), établit le résultat suivant : "deux quelconques sous-algèbres complètement réductibles maximales d'une algèbre de Lie d'endomorphismes $\mathfrak{G}$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur de la forme $\exp \operatorname{ad} X$, avec $X \in [\mathfrak{R},\mathfrak{G}]$, $\mathfrak{R}$ désignant le radical de $\mathfrak{G}$ ". Il en déduit que deux quelconques sous-algèbres adréductives maximales d'une algèbre de Lie sont conjuguées par un automorphisme intérieur du type précédent. La démonstration qu'il en donne consiste à se ramener aux cas des algèbres de Lie résolubles en utilisant le théorème de Lévi, et à celui des algèbres de Lie algébriques. Elle fait intervenir les sous-algèbres de Cartan et des arguments d'ordre géométriques.

Dans un article plus récent ([1]), Auslander et Brezin donnent une démonstration très différente du second résultat de Mostow. Ils se ramènent au cas des algèbres de Lie presque-algébriques après avoir introduit deux notions de clôture presque-algébrique d'une algèbre de Lie.

Nous nous proposons, dans le chapitre 2, de démontrer que si ρ est une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, deux quelconques sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{G}$ maximales, parmi les sous-algèbres $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ telles que la restriction de ρ à $\mathfrak{H}$ soit semi-simple (de telles sous-algèbres seront dites ρ-réductives maximales), sont conjuguées par un automorphisme de la forme $\exp \operatorname{ad} X$, où X appartient à un certain idéal $\operatorname{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$, inclus dans $[\mathfrak{R},\mathfrak{G}]$ que nous définissons au chapitre 1 (§ 3). En prenant pour ρ la représentation identique, dans le cas où $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie d'endomorphismes, et la représentation adjointe, nous retrouvons les résultats de Mostow.

La démonstration que nous proposons ici se distingue des précédentes par le fait qu'elle ne fait appel qu'à des résultats élémentaires de la théorie des algèbres de Lie.

Simultanément, nous montrerons que, si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie, $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ son radical et ρ une représentation de $\mathfrak{G}$, toute sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$, ρ-réductive maximale est telle que $\mathfrak{H} + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

Comme on peut s'y attendre le théorème de Mostow "augmenté" nous permet de retrouver le théorème de Lévi. D'autre part, l'adjonction que nous avons faite aura l'avantage de rendre plus aisée l'étude des algèbres de Lie presque-algébriques à laquelle nous consacrerons tout le troisième chapitre.

Certains auteurs semblent réserver la notion de presque-algébricité aux algèbres de Lie d'endomorphismes. Une telle algèbre est alors dite presque-algébrique si elle contient les composantes semi-simples et nilpotentes de ses éléments, cas particulier d'une algèbre de Lie algébrique qui contient toutes les répliques de ses éléments ([4], p. 181). Auslander et Brezin définissent une algèbre de Lie presque-algébrique comme une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ qui se met sous la forme $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + \mathfrak{H}$ où $\mathfrak{N}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{G}$. Ils démontrent, toujours à l'aide des clôtures presque-algébriques, qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est presque-algébrique, si et seulement si, pour tout élément X dans $\mathfrak{G}$, on peut trouver deux éléments S et N de $\mathfrak{G}$ tels que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(X) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(S) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(N)$ soit la décomposition en composantes semi-simple et nilpotente de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(X)$.

Nous généralisons ce résultat en introduisant différentes notions de presque-algébricité. Nous proposons une nouvelle démonstration du fait, établi par Auslander et Brezin, qu'une algèbre de Lie est presque-algébrique, si et seulement si, son radical l'est.

Nous montrons enfin, que, de même qu'une algèbre de Lie est toujours isomorphe à une algèbre de Lie d'endomorphismes - c'est le théorème d'Ado - toute algèbre de Lie presque-algébrique, au sens d'Auslander et Brezin, est isomorphe à une algèbre de Lie presque-algébrique d'endomorphismes.

Le chapitre 1 se compose de préliminaires. Il a pour seul but de faciliter la lecture des suivants.

-o-o-

CHAPITRE 1

GENERALITES

Toutes les algèbres de Lie et tous les espaces vectoriels que nous rencontrerons au cours de ce travail seront supposés, sauf mention expresse du contraire, de dimension finie sur un corps commutatif k de caractéristique zéro.

Nous supposerons connus les définitions et les résultats concernant la théorie élémentaire des algèbres de Lie que l'on peut trouver dans le chapitre des Eléments de Mathématique de Bourbaki qui leur est consacré ([3]), à l'exception de ce qui concerne le Théorème de Lévi, car nous en proposons une nouvelle démonstration au chapitre II (§ 2). Notre terminologie sera, en général, celle de l'ouvrage ci-dessus désigné. Ce dernier constituera d'ailleurs notre principale référence.

Nous allons préciser, dans ce chapitre, quelques points que nous utiliserons plus particulièrement par la suite.

1. RAPPELS SUR LA NILPOTENCE DES ALGEBRES DE LIE ET DE LEURS REPRESENTATIONS.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie constituée d'endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel M. Le sous-espace M_0 des éléments de M invariants par $\mathfrak{G}$ n'est pas réduit à zéro. Ce résultat connu sous le nom de Théorème d'Engel se trouve en particulier dans ([3]) ([3], § 4, Th. 1).

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie. On dit qu'une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ est SOUS-INVARIANTE s'il existe une suite croissante $(\mathfrak{G}_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_{i-1}$ étant un idéal de $\mathfrak{G}_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

"Toute sous-algèbre d'une algèbre de Lie nilpotente est sous-invariante".

En effet, soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$. Si $X \in \mathfrak{H}$, $ad_{\mathfrak{G}}(X)$ applique $\mathfrak{H}$ dans lui-même et définit par passage au quotient un endomorphisme σ de $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Comme $\mathfrak{G}$ est nilpotente, $ad_{\mathfrak{G}}(X)$ est un endomorphisme nilpotent, donc $\sigma(X)$ est nilpotent. D'après le théorème d'Engel, il existe un élément non nul de $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ qui est annulé par tous les $\sigma(X)$ quand X parcourt $\mathfrak{H}$. En d'autres termes, il existe $Y \in \mathfrak{G}$, $Y \notin \mathfrak{H}$ tel que $[X,Y] \in \mathfrak{H}$ pour tout $X \in \mathfrak{H}$. On en déduit que $\mathfrak{H}$ est un idéal d'une certaine sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ dont la dimension est $\dim \mathfrak{H} + 1$.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et ρ une représentation de $\mathfrak{G}$. Parmi les idéaux de $\mathfrak{G}$ composés d'éléments X tels que $\rho(X)$ soit nilpotent, il en existe un qui contient tous les autres. On le note $\mathfrak{N}_\rho$ et on l'appelle le PLUS GRAND IDEAL DE NILPOTENCE DE LA REPRESENTATION ρ .

L'ensemble des éléments X du radical de $\mathfrak{G}$ tels que $\rho(X)$ soit nilpotent est contenu dans $\mathfrak{N}_\rho$.

Dans le cas particulier où ρ est la représentation adjointe de $\mathfrak{G}$, le plus grand idéal de nilpotence se trouve être le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$. Il est égal à l'ensemble des éléments X du radical de $\mathfrak{G}$ tels que $\rho(X)$ soit nilpotent ([3], § 4-3).

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ son radical. Le RADICAL NILPOTENT de $\mathfrak{G}$ est égal à $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ ou encore à $[\mathfrak{G},\mathrm{rad}(\mathfrak{G})]$. Il est contenu dans $\mathfrak{N}_\rho$ quelle que soit la représentation ρ de $\mathfrak{G}$ ([3], § 5-3).

2. RAPPELS SUR LA SEMI-SIMPLICITE DES ALGEBRES DE LIE ET DE LEURS REPRESENTATIONS.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{G}$-module semi-simple, ρ la représentation associée. Alors le sous-$\mathfrak{G}$-module M_0 des éléments de M invariants par l'action de $\mathfrak{G}$ admet un et un seul supplémentaire à savoir le sous-$\mathfrak{G}$-module M_1 engendré par les $\rho(X)m$ pour X dans $\mathfrak{G}$ et m dans M ([3], § 3, Prop. 6).

Le théorème de Weyl ou théorème de la complète réductibilité affirme que toute représentation linéaire d'une algèbre de Lie semi-simple est complètement réductible ou en termes de modules "si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie semi-simple, tout $\mathfrak{G}$-module est semi-simple" ([3], § 6, Th.2).

Une caractérisation cohomologique des algèbres de Lie semi-simples est donnée par le résultat suivant : "Une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est semi-simple si et seulement si pour tout $\mathfrak{G}$-module M, le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathfrak{G},N)$, de $\mathfrak{G}$ à valeurs dans N, est nul ([4], p.107).

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{G}$-module et ρ la représentation associée. Une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ sera dite REDUCTIVE RELATIVEMENT A LA REPRESENTATION ρ ou plus brièvement ρ-REDUCTIVE si, muni de la structure de $\mathfrak{H}$-module que lui confère la restriction de ρ à $\mathfrak{H}$, M est semi-simple.

Si $M = \mathfrak{G}$ et si ρ est la représentation adjointe de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ est dite réductive dans $\mathfrak{G}$.

Une algèbre de Lie sera dite réductive si elle est réductive dans elle-même.

Le théorème suivant donne une caractérisation des représentations semi-simples des algèbres de Lie.

"Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ son radical et ρ une représentation de $\mathfrak{G}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) ρ est semi-simple ;

b) $\rho(\mathfrak{G})$ est réductive et son centre est formé d'endomorphismes semi-simples ;

c) $\rho(\mathrm{rad}(\mathfrak{G}))$ est formé d'endomorphismes semi-simples ;

d) la restriction de ρ à $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ est semi-simple".

Il permet d'établir le résultat suivant : "Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie. Le produit tensoriel de deux $\mathfrak{G}$-modules semi-simples est semi-simple". ([3], § 6, th.4 et cor.1 du th.4).

3. QUELQUES REMARQUES CONCERNANT LE RADICAL D'UNE ALGEBRE DE LIE.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ son radical. Si $\mathfrak{U}$ est un idéal de $\mathfrak{G}$, on a $\mathrm{rad}(\mathfrak{U}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{U}$ et $\mathrm{rad}(\mathfrak{G}/\mathfrak{U}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{G})/\mathfrak{U} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ ([3]), § 5, cor.3 de la prop.5 et § 6, cor.3 du th.2).

Définissons $\mathrm{rad}^0(\mathfrak{G}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$, $\mathrm{rad}^1(\mathfrak{G}) = [\mathfrak{G}, \mathrm{rad}(\mathfrak{G})] \ldots \mathrm{rad}^{n+1}(\mathfrak{G}) = [\mathfrak{G}, \mathrm{rad}^n(\mathfrak{G})]$ et $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{rad}^n(\mathfrak{G})$.

Pour tout $X \in \mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$, $\mathrm{ad}(X)$ est nilpotent.

L'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{G}$ de la forme $\exp \mathrm{ad}\, X$ où X est un élément de $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$ est un groupe pour la composition des applications. C'est une conséquence immédiate du résultat suivant : "Soient G un groupe nilpotent, $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{G}_1$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$. L'image G_1 de $\mathfrak{G}_1$ par l'application exponentielle est un sous-groupe de G ([9], chap.2, cor.1 du th. de la page 82). Nous noterons ce groupe $\Gamma(\mathfrak{G})$.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ son radical et $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{H} + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Les conditions suivantes sont alors vérifiées.

1) $\mathrm{rad}(\mathfrak{H}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{H}$, $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$;

2) si M est un $\mathfrak{G}$-module semi-simple, M est encore semi-simple en tant que $\mathfrak{H}$-module.

Nous allons démontrer ce dernier résultat.

1) Le quotient $\mathfrak{H}/\mathfrak{H} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ est isomorphe à $(\mathfrak{H}+\mathrm{rad}(\mathfrak{G}))/\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$. Il est donc semi-simple. Le radical de $\mathfrak{G}$ contient donc l'intersection $\mathfrak{H} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$. D'autre part, cette dernière constitue un idéal résoluble de $\mathfrak{H}$, elle est donc contenue dans le radical de $\mathfrak{H}$.

De l'égalité $\mathrm{rad}(\mathfrak{H}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{H}$, nous déduisons $\mathrm{rad}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ et par suite $\mathrm{rad}^{p}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{rad}^{p}(\mathfrak{G})$ pour tout entier p , d'où $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$.

2) Soit ρ une représentation de $\mathfrak{G}$ dans un espace vectoriel M . La représentation ρ est semi-simple, si et seulement si, la sous-algèbre $\rho(\mathrm{rad}(\mathfrak{G}))$ de l'algèbre de Lie des endomorphismes de M est formée d'endomorphismes semi-simples (2.). Dans ce cas, la sous-algèbre $\rho(\mathrm{rad}(\mathfrak{H}))$ est encore formée d'endomorphismes semi-simples. Nous en déduisons que la restriction de ρ à $\mathfrak{H}$ est une représentation semi-simple de $\mathfrak{H}$ dans M .

4. COMPOSANTES SEMI-SIMPLES ET NILPOTENTES D'UN ENDOMORPHISME.

Soit $\mathfrak{gl}(M)$ l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel M . Pour tout $X \in \mathfrak{gl}(M)$, il existe deux éléments S et N uniques de $\mathfrak{gl}(M)$ tels que S soit semi-simple, N soit nilpotent, $X = S + N$, qui commutent entre eux. Les endomorphismes S et N sont des fonctions polynômes de X sans terme constant. On appelle S la composante semi-simple de X et N la composante nilpotente de X .

"Si $\mathfrak{G}$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{gl}(M)$, elle contient les composantes semi-simples et nilpotentes de ses éléments" ([3], § 6-3).

5. EXTENSIONS.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie sur le corps k. Soit k_1 une extension commutative et soit $\mathfrak{G}(k_1)$ l'algèbre obtenue par extension du corps de base de k à k_1.

Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ (resp. pour toute représentation ρ de $\mathfrak{G}$) nous notons $\mathfrak{H}(k_1)$ (resp. $\rho(k_1)$) la sous-algèbre de $\mathfrak{G}(k_1)$ (resp. la représentation de $\mathfrak{G}(k_1)$) obtenue par extension du corps de base de k à k_1.

Si ρ est une représentation semi-simple de $\mathfrak{G}$, $\rho(k_1)$ est une représentation semi-simple de $\mathfrak{G}(k_1)$ ([2], § 13, prop.4).

Le centre de $\mathfrak{G}(k_1)$ se déduit du centre de $\mathfrak{G}$ par extension du corps de base de k à k_1 ((3), § 3-8).

Si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{G}(k_1)$ est encore semi-simple ([3], § 6-10).

Nous en déduisons que si $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ réductive relativement à une représentation ρ de $\mathfrak{G}$, $\rho(k_1)$ est une sous-algèbre $\rho(k_1)$-réductive de $\mathfrak{G}(k_1)$.

Si $\mathfrak{N}_\rho$ est le plus grand idéal de nilpotence de $\mathfrak{G}$ relativement à une représentation ρ de $\mathfrak{G}$, le plus grand idéal de nilpotence de $\rho(k_1)$ est $\mathfrak{N}_\rho(k_1)$.

CHAPITRE 2

§ 1 - UNE EXTENSION DU THEOREME DE MOSTOW

Lemme 1.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ son radical et N un $\mathfrak{G}$-module semi-simple. Soit $c \in H^1(\mathfrak{G},N)$. Les sous-algèbres $\mathfrak{H}$ maximales dans l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ sur lesquelles c est cohomologue à zéro sont conjuguées deux à deux par des éléments de $\Gamma(\mathfrak{G})$ et telles que $\mathrm{rad}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$. (*)

Remarque 1.

Si une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ est telle que sur $\mathfrak{H}$, c soit cohomologue à zéro, nous dirons que la sous-algèbre $\mathfrak{H}$ annule la classe c .

Remarque 2.

Notons ρ la représentation associée à la structure de $\mathfrak{G}$-module de N . Soit c un cocycle de la classe c . Son noyau $\mathrm{Ker}\, c$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ qui annule la classe c . Réciproquement, soit $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ qui annule c . Il existe un élément a dans N tel que $c(X) = \rho(X)a$ pour tout $X \in \mathfrak{H}$. Par suite, $\mathfrak{H}$ est contenu dans le noyau de $c - da$. Donc, toute sous-algèbre de $\mathfrak{G}$, maximale parmi celles qui annulent c est le noyau d'un cocycle de la classe c .

Démonstration du lemme 1.

1) Supposons que N soit un $\mathfrak{G}$-module simple.

Soit $\mathfrak{R}$ le noyau de la représentation ρ de $\mathfrak{G}$ dans N , associée à la structure de $\mathfrak{G}$-module de N et soit c un cocycle de

(*) La formulation cohomologique de ce résultat est due à J.L. Koszul

la classe $\underline{c}$.

Le résultat étant évident dans le cas où $\underline{c}$ est la classe nulle, nous supposerons $\underline{c} \neq \underline{0}$.

Considérons la restriction de c à $\mathfrak{R}$. C'est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$-modules dont le noyau $\operatorname{Ker} c \wedge \mathfrak{R}$ est un idéal de $\mathfrak{G}$ qui contient l'idéal dérivé $[\mathfrak{R},\mathfrak{R}]$ de $\mathfrak{R}$. En effet, pour $X \in \mathfrak{G}$ et $Y \in \mathfrak{R}$ nous avons $c([X,Y]) = \rho(X)c(Y)$.

Supposons que la restriction de c à $\mathfrak{R}$ soit nulle. Nous allons voir que ce n'est pas possible. Le cocycle c peut alors se mettre sous la forme $\tilde{c}_0 q$ où $\tilde{c}$ est un cocycle sur $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ à valeurs dans N et où q est l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Mais N est un $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$-module simple fidèle, donc $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ est réductive. Elle ne peut être semi-simple, car alors $\tilde{c}$ serait nulle (chap. 1-2) et il en serait de même de $\underline{c}$. Nous pouvons donc trouver un élément X de $\mathfrak{G}$ tel que $q(X)$ soit un élément non nul du centre de $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Alors $\rho(X)$ est bijectif et pour tout Y dans $\mathfrak{G}$, nous avons $[X,Y] \in \mathfrak{R} \subset \operatorname{Ker} c$, donc $\rho(X)c(Y) - \rho(Y)c(X) = 0$, ce qui prouve que $c(Y) = (\rho(X))^{-1}\rho(Y)c(X) = \rho(Y)(\rho(X))^{-1}c(X)$. Par suite, on a $c = d(\rho(X)^{-1}c(Y))$ contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que $\operatorname{Ker} c$ ne contient pas $\mathfrak{R}$ donc, puisque N est un $\mathfrak{G}$-module simple, que la suite

$$(*) \qquad 0 \to \operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \to N \to 0$$

est exacte.

Montrons que $\mathfrak{R}$ est contenu dans $\operatorname{rad}(\mathfrak{G}) + \operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$ et même dans $\operatorname{rad}^{\infty}(\mathfrak{G}) + \operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$. De l'inclusion $[\mathfrak{R},\mathfrak{R}] \subset \operatorname{Ker} c$ nous déduisons que $\mathfrak{R}/\operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{G}/\operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$ donc est contenu dans le radical, $\operatorname{rad}(\mathfrak{G})/\operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}/\operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$ (chap.1-3). D'où l'inclusion $\mathfrak{R} \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{G}) + \operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$. Le quotient $\mathfrak{R}/\operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$ est un $\mathfrak{G}$-module simple (*). Nous avons donc :

$$\mathfrak{R} = (\operatorname{ad}(\mathfrak{G}))^p\mathfrak{R} + \operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R} \subset (\operatorname{ad}(\mathfrak{G}))^p \operatorname{rad}(\mathfrak{G}) + \operatorname{Ker} c \cap \mathfrak{R}$$

quel que soit l'entier naturel p . Et par suite, $\mathfrak{R} \subset \mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G}) + \mathrm{Ker}\, c \cap \mathfrak{R}$.

Cela étant, soit c' un autre cocycle de la classe $\underline{c}$. Nous avons $c - c' = da$ où $a \in N$. Nous pouvons donc écrire $a = c(Y)$ pour un certain élément Y de $\mathfrak{R}$, et même de $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$ puisque $\mathfrak{R}$ est contenu dans $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G}) + \mathrm{Ker}\, c \cap \mathfrak{R}$. Ce qui donne $c'(X) = c(X) - \rho(X)c(Y) = c(X + [Y,X])$ pour tout élément X de $\mathfrak{G}$. Mais $[Y,X]$ est un élément de $\mathfrak{R}$ et $\mathrm{ad}(Y)([Y,X])$ appartient à l'idéal dérivé de $\mathfrak{R}$ donc à $\mathrm{Ker}\, c$. Donc $\mathrm{ad}^{p}(Y)([Y,X])$ est un élément du noyau de c pour tout entier $p > 1$. Nous avons donc $c'(X) = c(\exp \mathrm{ad}(Y)X)$. Nous en déduisons $\mathrm{Ker}\, c = \exp \mathrm{ad}(Y)\, \mathrm{Ker}\, c$; ce qui démontre la conjugaison par un élément de $\Gamma(\mathfrak{G})$ de deux quelconques sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ maximales parmi celles qui annulent $\underline{c}$.

Il nous reste à montrer l'égalité $\mathrm{Ker}\, c + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Soit pour cela un élément X de $\mathfrak{G}$. Nous avons $c(X) \in N$, donc $c(X) = c(Y)$ pour un élément Y de $\mathfrak{R}$. D'où $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} + \mathrm{Ker}\, c$ et, puisque $\mathfrak{R}$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\, c \cap \mathfrak{N} + \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R} + \mathrm{Ker}\, c = \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) + \mathrm{Ker}\, c \cap \mathfrak{R} + \mathrm{Ker}\, c = \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) + \mathrm{Ker}\, c \quad .$$

2) Cas général.

On raisonne par récurrence sur la dimension de N .

Si N est de dimension 1 , N est simple et le résultat a déjà été établi dans ce cas.

Si N est de dimension strictement supérieure à 1 , étant semi-simple, il se met sous la forme $N_1 \oplus N_2$ où N_1 et N_2 sont deux sous-$\mathfrak{G}$-modules propres de N . On a alors l'égalité $H^1(\mathfrak{G},N) = H^1(\mathfrak{G},N_1) + H^1(\mathfrak{G},N_2)$. Soit $\underline{c}$ un élément de $H^1(\mathfrak{G},N)$. Il s'écrit $\underline{c} = \underline{c}_1 + \underline{c}_2$ avec $\underline{c}_1 \in H^1(\mathfrak{G},N_1)$ et $\underline{c}_2 \in H^1(\mathfrak{G},N_2)$.

Soient $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ maximales parmi celles qui annulent $\underline{c}$. Elles annulent $\underline{c}_1$. Il existe donc une sous-algèbre $\mathfrak{H}'_1$ de $\mathfrak{G}$ maximale dans l'ensemble de celles qui annulent

$\underline{c}_1$ qui contient $\mathfrak{h}_1$. L'hypothèse de récurrence nous assure l'existence d'un élément X de $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$ tel que $\exp \mathrm{ad}\, X(\mathfrak{h}_2)$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{h}'_1$. Elle nous donne l'égalité $\mathrm{rad}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{h}'_1 = \mathfrak{G}$. Nous en déduisons $\mathrm{rad}(\mathfrak{h}'_1) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$, donc $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{h}'_1) \subset \mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$ et que N_2 est un $\mathfrak{h}'_1$-module semi-simple (chap.1-3). Les sous-algèbres $\mathfrak{h}_1$ et $\exp \mathrm{ad}\, X\mathfrak{h}_2$ sont deux sous-algèbres de $\mathfrak{h}'_1$ maximales dans l'ensemble de celles qui annulent $\underline{c}_2$. L'hypothèse de récurrence appliquée au $\mathfrak{h}'_1$-module N_2 nous donne la conjugaison par un élément de $\exp \mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{h}'_1)$ de $\mathfrak{h}_1$ et $\exp \mathrm{ad}\, X(\mathfrak{h}_2)$ et l'égalité $\mathfrak{h}_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{h}'_1$.

Nous en déduisons, puisque $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{h}'_1)$ est contenu dans $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$ et que $\Gamma(\mathfrak{G})$ est un groupe, que $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont conjuguées par un élément de $\Gamma(\mathfrak{G})$, ainsi que l'égalité

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{h}'_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{h}_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{h}'_1) + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{h}_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) \quad .$$

C.Q.F.D.

Proposition 1.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie dont on désigne par $\mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ le radical, M un $\mathfrak{G}$-module, N un sous-$\mathfrak{G}$-module semi-simple de M tel que le $\mathfrak{G}$-module quotient M/N soit semi-simple.

a) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ maximale dans l'ensemble de celles qui factorisent N dans M , elle vérifie $\mathfrak{h} + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

b) Deux quelconques sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ maximales dans l'ensemble de celles qui factorisent N dans M sont conjuguées par un élément de $\Gamma(\mathfrak{G})$.

Démonstration.

1) Nous allons voir qu'il suffit d'étudier le problème quand N est de codimension 1 dans M et $\mathfrak{G}M$ est contenu dans N .

Pour cela, nous allons effectuer une démarche analogue à celle utilisée dans la démonstration de la complète réductibilité des représen-

tations des algèbres de Lie semi-simples telle qu'on la trouve exposée dans [10]. Cette dernière consiste à remarquer que les sous-algèbres qui factorisent N dans M ne sont autres que celles qui factorisent le sous-$\mathfrak{G}$-module V de $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ constitué par les éléments dont la restriction à N est identiquement nulle dans le sous-$\mathfrak{G}$-module W de $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ constitué par ceux dont la restriction à N est une homothétie. Cette assertion résulte du fait que, si $\mathfrak{H}$ désigne une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ et $k\Phi$ un $\mathfrak{H}$-supplémentaire de V dans W, le noyau de Φ est un $\mathfrak{H}$-supplémentaire de N dans M. Nous avons $\mathfrak{G}W \subset V$ et V est de codimension 1 dans W sauf si N est nul auquel cas il n'y a plus de problème.

D'autre part, étant de dimension 1 sur k, le $\mathfrak{G}$-module quotient W/V est simple ; quant à V, il est isomorphe en tant que $\mathfrak{G}$-module à $\mathrm{Hom}_k(M/N,N)$, donc à $(M/N)^* \otimes N$ qui est simple si N et M/N le sont (chap.1-2).

Nous supposons maintenant que $\mathfrak{G}M$ est contenu dans N et que N est de codimension 1 dans M.

2) Soit a un élément de $M - N$. L'application $c : X \to Xa$ est un cocycle sur $\mathfrak{G}$ à valeurs dans N. Sa classe $\underline{c}$ dans $H^1(\mathfrak{G},N)$ ne dépend du choix de a dans $M - N$ qu'à la multiplication par un élément non nul du corps de base k près.

Les sous-algèbres $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ qui annulent $\underline{c}$ - remarque 1 de ce même paragraphe - sont celles qui factorisent N dans M. Car si $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ annule $\underline{c}$, nous avons $c(X) = dn(X)$ pour un élément n de N, quel que soit $X \in \mathfrak{H}$ et $k(a-n)$ est une droite supplémentaire de N dans M ; et réciproquement, si $\mathfrak{H}b$ est nul pour un élément b de $M-N$, il est clair que $\mathfrak{H}$ annule $\underline{c}$.

Nous achevons la démonstration de la proposition en appliquant

le lemme 1 que nous avons énoncé au début de ce paragraphe.

C.Q.F.D.

Rappelons que si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie munie d'une représentation ρ dans un espace vectoriel M, une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ est dite ρ-réductive si la restriction de ρ à $\mathfrak{H}$ fait de M un $\mathfrak{H}$-module semi-simple.

Théorème 1. (Extension du théorème de Mostow).

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et ρ une représentation de $\mathfrak{G}$ dans un espace vectoriel M.

a) Si $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre ρ-réductive maximale de $\mathfrak{G}$, elle vérifie l'égalité $\mathfrak{H} + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

b) Deux quelconques sous-algèbres ρ-réductives maximales de $\mathfrak{G}$ sont conjuguées par un élément de $\Gamma(\mathfrak{G})$.

Remarque 3.

Dans le cas où $\mathfrak{G}$ est semi-simple, l'assertion a, du théorème 1 redonne le théorème de la complète réductibilité (chap.1-2).

Lemme 2.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, ρ une représentation de $\mathfrak{G}$ dans un espace vectoriel M et soit N un sous-$\mathfrak{G}$-module de M semi-simple tel que le module quotient M/N soit semi-simple. Les sous-algèbres de $\mathfrak{G}$, ρ-réductives maximales sont les sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ qui sont maximales dans l'ensemble de celles qui factorisent N dans M.

Démonstration du lemme 2.

Désignons par ρ_N (resp. $\rho_{M/N}$) la représentation de $\mathfrak{G}$ déduite de ρ dans N (resp. M/N). Soit $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$

maximale parmi celles qui factorisent N dans M. Les $\mathfrak{h}$-modules M et M/N sont semi-simples (prop.2 de ce même paragraphe et chap.1-3). En tant que $\mathfrak{h}$-module M est isomorphe à la somme directe de N et de M/N. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est donc ρ-réductive. D'autre part, si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre ρ-réductive de $\mathfrak{G}$, elle factorise N dans M. D'où le résultat.

Démonstration du théorème 1.

Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de M.

Si $\dim M = 1$, M est un $\mathfrak{G}$-module simple et le résultat est évident.

Supposons la dimension de M strictement supérieure à 1. Ou bien M est semi-simple auquel cas le résultat est encore évident, ou bien il ne l'est pas, et l'on peut trouver un sous-$\mathfrak{G}$-module $N \neq 0$ de M tel que le quotient M/N soit semi-simple. C'est ce dernier cas qu'il nous faut étudier.

Soient $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ ρ-réductives maximales, elles sont réductives pour la restriction ρ_N de la représentation ρ à N. La sous-algèbre $\mathfrak{h}_1$ est contenue dans une sous-algèbre $\mathfrak{h}'_1$ de $\mathfrak{G}$, ρ_N-réductive maximale. L'hypothèse de récurrence nous permet de trouver un élément X dans $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$ tel que $\exp \mathrm{ad}\, X(\mathfrak{h}_2)$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{h}'_1$ et d'établir l'égalité $\mathfrak{h}'_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Nous avons donc $\mathrm{rad}(\mathfrak{h}'_1) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{G})$ et par suite $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{h}'_1) \subset \mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{G})$, et M/N est un $\mathfrak{h}'_1$-module semi-simple (prop.2 de ce même paragraphe et chap.1-3). Les sous-algèbres $\mathfrak{h}_1$ et $\exp \mathrm{ad}\, X(\mathfrak{h}_2)$ sont deux sous-algèbres de $\mathfrak{h}'_1$ maximales parmi les sous-algèbres ρ-réductives de $\mathfrak{h}'_1$. Elles sont donc maximales parmi les sous-algèbres de $\mathfrak{h}'_1$ qui factorisent N dans M (lemme 1 de ce même paragraphe). Nous en déduisons (prop.2 de ce même paragraphe) l'existence d'un élément Y de $\mathrm{rad}^\infty(\mathfrak{h}'_1)$ tel que $\mathfrak{h}_2 = \exp \mathrm{ad}\, Y \exp \mathrm{ad}\, X\mathfrak{h}_1$, et puisque $\Gamma(\mathfrak{G})$ est un groupe, que $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont $\Gamma(\mathfrak{G})$-conjuguées. Nous en déduisons également

l'égalité $\mathfrak{h}_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{h}'_1$, d'où :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{h}'_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{h}_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{h}'_1) + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{h}_1 + \mathrm{rad}(\mathfrak{G}) \quad .$$

C.Q.F.D.

§ 2 - APPLICATION DU THEOREME DE MOSTOW A L'ETUDE DES SOUS-ALGEBRES REDUCTIVES MAXIMALES DANS UNE ALGEBRE DE LIE. LE THEOREME DE LEVI.

Dans tout ce paragraphe $\mathfrak{G}$ désignera une algèbre de Lie et $\mathfrak{R}$ son radical.

Proposition 1.

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{G}$, le centre de $\mathfrak{h}$ est égal à l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec le radical de $\mathfrak{G}$.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate du théorème de Mostow "nouvelle forme" (chap.2 , § 2 , th.1) et de (chap.1 , § 2 , prop.3).

Proposition 2. (nouvelle forme du théorème de Lévi).

a) Toute sous-algèbre semi-simple maximale de $\mathfrak{G}$ est supplémentaire du radical dans $\mathfrak{G}$.

b) Deux sous-algèbres semi-simples maximales de $\mathfrak{G}$ sont conjuguées par un automorphisme de $\mathfrak{G}$ de la forme exp ad X , où X est un élément de $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$.

Démonstration :

Remarquons d'abord que toute sous-algèbre semi-simple maximale

de $\mathfrak{G}$ est l'idéal dérivé d'une sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{G}$. En effet, soit $\mathfrak{S}$ une sous-algèbre semi-simple maximale de $\mathfrak{G}$, elle est contenue dans une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ réductive maximale dans $\mathfrak{G}$. Etant semi-simple, elle est égale à son idéal dérivé, donc contenue dans l'idéal dérivé de $\mathfrak{h}$. Ce dernier est semi-simple, $\mathfrak{S}$ étant maximale lui est égale. Désignons par $\mathfrak{C}$ le centre de $\mathfrak{h}$. La proposition 1 et le théorème de Mostow (chap.2 , § 2 , th.1) nous permettent d'écrire l'égalité $\mathfrak{G} = \mathfrak{h} + \mathfrak{R} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] + \mathfrak{C} + \mathfrak{R} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$ d'où a). Considérons maintenant deux sous-algèbres semi-simples maximales de $\mathfrak{G}$, elles sont $\exp \operatorname{ad} \mathrm{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$-conjuguées puisque idéaux dérivés de deux sous-algèbres réductives maximales dans $\mathfrak{G}$.

Proposition 3.

Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{C}$ deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{G}$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

a) $\mathfrak{C}$ est une sous-algèbre du radical de $\mathfrak{G}$, maximale parmi celles qui sont réductives dans $\mathfrak{G}$, et $\mathfrak{S}$ une sous-algèbre semi-simple maximale du centralisateur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{G}$.

b) $\mathfrak{S}$ est une sous-algèbre semi-simple maximale de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{C}$ une sous-algèbre du radical de $\mathfrak{G}$ maximale parmi celles qui sont réductives dans $\mathfrak{G}$ et contenues dans le centralisateur de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{G}$.

Alors, l'algèbre $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ est une sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{G}$ et toute sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{G}$ peut être obtenue par l'une quelconque de ces deux constructions.

Démonstration :

Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{S}$ deux sous-algèbres de Lie vérifiant les conditions de a). La sous-algèbre $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ est réductive dans $\mathfrak{G}$, donc contenue dans une algèbre $\mathfrak{h}$ réductive maximale dans $\mathfrak{G}$. Nous avons $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{C}'$ avec $\mathfrak{C}'$ égale à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{R}$ - d'après la proposition 1 - et qui se trouve donc être une sous-algèbre de $\mathfrak{R}$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}}$-réductive qui contient $\mathfrak{C}$. On en déduit que le centre $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{h}$ est égal à $\mathfrak{C}$.

Nous avons, d'autre part, $\mathfrak{S} = [\mathfrak{S},\mathfrak{S}] \subset [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, or $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ semi-simple, contenue dans le centralisateur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{g}$. Nous en déduisons $\mathfrak{S} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. Ainsi, $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ est une sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{g}$.

Soient maintenant deux sous-algèbres $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{C}$ vérifiant les conditions de b). La sous-algèbre $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ de $\mathfrak{g}$ est $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-réductive, donc contenue dans une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ réductive maximale dans $\mathfrak{g}$. La sous-algèbre $\mathfrak{S}$ étant semi-simple maximale est - comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition 2 - égale à l'idéal dérivé de $\mathfrak{h}$. La sous-algèbre $\mathfrak{C}$ est contenue dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{R}$, qui est le centre de $\mathfrak{h}$ en vertu de la proposition 1. Le centre de $\mathfrak{h}$ étant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-réductif et contenu dans le centralisateur de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à la sous-algèbre $\mathfrak{S}$ puisque cette dernière est maximale relativement à ces deux propriétés. Donc $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ est une sous-algèbre réductive maximale de $\mathfrak{g}$.

Réciproquement, toute sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ où $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{S}$ vérifient les conditions de a) et de b). En effet, soit $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{g}$. Elle est réductive, donc de la forme $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}$, si $\mathfrak{C}$ désigne son centre et $\mathfrak{S}$ son idéal dérivé. Son centre $\mathfrak{C}$ est égal à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{R}$ d'après la proposition 1. C'est une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-réductive de $\mathfrak{R}$, puisque abélienne et composée d'éléments X tels que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ soit un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}$ (chap.1-2). Si $\mathfrak{C}$ n'était pas maximale en tant que sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-réductive du radical de $\mathfrak{g}$, elle serait strictement contenue dans une sous-algèbre réductive maximale relativement à ces mêmes propriétés. Il est facile de voir que cette dernière serait contenue dans le centre d'une sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{g}$ et d'arriver à une contradiction en utilisant la conjugaison que nous donne le théorème de Mostow (chap.2, § 2, th.1). La sous-algèbre $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{h}$ est semi-simple et contenue dans le centralisateur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{g}$. Considérons une sous-algèbre $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{g}$ maximale parmi celles qui sont semi-simples et contenues dans le centralisateur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{g}$ et qui, de plus, contient $\mathfrak{S}$. La sous-algèbre $\mathfrak{S}' + \mathfrak{C}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ et

contient $\mathfrak{h}$, elle est donc égale à $\mathfrak{h}$. Nous avons montré que les conditions de a) sont satisfaites par $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{C}$.

Il nous reste à voir qu'il en est de même pour les conditions de b).

Si $\mathfrak{S}$ n'était pas maximale parmi les sous-algèbres semi-simples de $\mathfrak{G}$, elle serait strictement contenue dans une sous-algèbre $\mathfrak{S}'$ semi-simple maximale de $\mathfrak{G}$. Nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition 2 qu'une telle sous-algèbre se réalise comme idéal dérivé d'une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}$-réductive maximale. La conjugaison des sous-algèbres $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}$-réductives maximales d'une algèbre de Lie que nous donne le théorème de Mostow (chap.1 , § 2 , th.1) et le fait que $\mathfrak{S}$ soit égale à l'idéal dérivé de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ réductive maximale dans $\mathfrak{h}$ nous montrent l'impossibilité d'une telle situation. De même, si $\mathfrak{C}$ n'était pas maximale parmi les sous-algèbres de $\mathfrak{R}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}$-réductive contenues dans le centralisateur de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{G}$, elle serait strictement contenue dans une sous-algèbre $\mathfrak{C}'$ maximale relativement à ces deux conditions, la somme $\mathfrak{C}' + \mathfrak{S}$ serait alors une sous-algèbre de $\mathfrak{R}$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}$-réductive contenant strictement $\mathfrak{C}'$, ce qui est contraire à l'hypothèse : ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE 3

§ 1 - ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES D'ENDOMORPHISMES

Soit M un espace vectoriel. On sait que tout endomorphisme X de M s'écrit d'une manière unique sous la forme $S + N$ où S est un endomorphisme semi-simple de M, N un endomorphisme nilpotent de M tels que $[S,N] = 0$; de plus, S et N sont des fonctions polynomiales sans termes constants de X (chap.1, § 1-4). S est dite composante semi-simple de X, N composante nilpotente de X. Si X appartient à une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{S}$ semi-simple de l'algèbre de Lie des endomorphismes de M, S et N sont des éléments de $\mathfrak{S}$ (chap.1-4). Nous nous proposons dans ce paragraphe de caractériser les algèbres de Lie d'endomorphismes qui contiennent les composantes semi-simples et nilpotentes de leurs éléments.

Théorème 1.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes et $\mathfrak{N}_0$ son plus grand idéal de nilpotence pour la représentation identique. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a) *$\mathfrak{G}$ admet la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \oplus \mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}$ est une quelconque sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$, maximale parmi celles qui sont réductives relativement à la représentation identique de $\mathfrak{G}$;*

b) *$\mathfrak{G}$ contient les composantes semi-simples et nilpotentes de ses éléments.*

Définition.

Une algèbre de Lie vérifiant l'une des deux conditions du théorème 1 sera dite "PRESQUE-ALGEBRIQUE RELATIVEMENT A SA REPRESENTATION IDENTIQUE" ou plus simplement "ALGEBRE PRESQUE-ALGEBRIQUE D'ENDOMORPHISMES".

La démonstration du théorème 1 requiert quelques lemmes.

Lemme 1.

Soit $\mathfrak{N}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes d'un espace vectoriel M, composée d'éléments nilpotents. Si N est un endomorphisme nilpotent de M contenu dans le normalisateur de $\mathfrak{N}$ dans l'algèbre de Lie des endomorphismes de M, les éléments de l'algèbre de Lie $kN + \mathfrak{N}$ sont des endomorphismes nilpotents.

Démonstration :

En effet, le théorème d'Engel (chap.1-1) nous dit que le sous-ensemble M_0 de M constitué par les éléments de M invariants par $\mathfrak{N}$ n'est pas réduit à zéro. Par récurrence, on peut mettre en évidence un drapeau

$$M = M_n \supset \ldots \supset M_1 \supset M_0$$

de M tel que XM_k soit contenu dans M_{k-1}, quels que soient les éléments X de $\mathfrak{N}$ et k de $\{1,2,\ldots,n\}$ et M_k soit stable par N pour tout k de $\{1,2,\ldots,n\}$. L'endomorphisme N étant nilpotent, chaque M_k admet lui aussi un drapeau

$$M_k = M_{k,n_k} \supset \ldots \supset M_{k,1} \supset M_{k,0}$$

tel que $NM_{k,i}$ soit contenu dans $M_{k,i-1}$ pour tout élément i de $\{1,2,\ldots,n_k\}$ et $NM_{k,0}$ soit nul. Ceci nous permet d'affirmer que les endomorphismes de $kN + \mathfrak{N}$ sont nilpotents.

Lemme 2.

Soit $\mathfrak{R}$ une algèbre de Lie de la forme $\mathfrak{R} = kH + \mathfrak{N}$ où $\mathfrak{N}$ est un idéal nilpotent et H un élément tel que son image par la représentation adjointe de $\mathfrak{R}$ soit un endomorphisme semi-simple. A tout élément $H + N$ de $kH + \mathfrak{N}$, on peut associer deux éléments X et N' de $\mathfrak{N}$ tels que $H + N$ soit égal à $(\exp \operatorname{ad} X)(H) + N'$ et le crochet $[(\exp \operatorname{ad} X)(H), N']$ soit nul.

Ce lemme résoud le cas critique de l'implication (a) ⇒ b)) dans le théorème 1, celui où $\mathfrak{H} = kH$ et $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$.

Démonstration :

Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de l'idéal $\mathfrak{N}$.

- Etablissons d'abord le résultat dans le cas où l'idéal $\mathfrak{N}$ est abélien. Un élément N de $\mathfrak{N}$ étant donné, il suffit alors de montrer qu'il existe un couple (X,N') d'éléments de $\mathfrak{N}$ tel que $H + N = H + [X,H] + N'$ et $[H + [X,H], N'] = 0$, ou encore tel que $[X,H] = N - N'$ et $[H,N'] = 0$. Or, la restriction $\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{N}}$ de $\operatorname{ad} H$ à $\mathfrak{N}$ étant semi-simple, $\mathfrak{N}$ admet la décomposition $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} \operatorname{ad} H|_{\mathfrak{N}} + \operatorname{Im} \operatorname{ad} H|_{\mathfrak{N}}$. Etant donné un élément N de $\mathfrak{N}$, on peut donc trouver un élément X de $\mathfrak{N}$ tel que $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{N}}(X) + N$ appartienne au noyau de $\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{N}}$.

- Traitons maintenant le cas général. Si $\dim \mathfrak{N} = 1$, $\mathfrak{N}$ est abélien et le résultat est déjà établi dans ce cas.

Supposons maintenant $\dim \mathfrak{N} > 1$. L'idéal $\mathfrak{N}$ est nilpotent, son centre $\mathfrak{Z}$ n'est donc pas réduit à zéro et la dimension du quotient $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ est strictement inférieure à celle de $\mathfrak{N}$. D'autre part, $(kN + \mathfrak{N})/\mathfrak{Z}$ et $kH + \mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ sont deux algèbres de Lie isomorphes. L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire $H + N = (\exp \operatorname{ad} X)(H) + N' + Z$, où N' est un élément de $\mathfrak{N}$, Z un élément de $\mathfrak{Z}$, et où $[(\exp \operatorname{ad} X)(H), N']$ appartient à $\mathfrak{Z}$. Nous en déduisons que $H + N$ est un élément de

l'algèbre de Lie $k(\exp \operatorname{ad} X)(H) + (kN' + \mathfrak{z})$ dont $kN' + \mathfrak{z}$ est un idéal abélien. L'image de l'élément $(\exp \operatorname{ad} X)(H)$ par l'application adjointe est un endomorphisme semi-simple. Nous sommes donc ramenés au cas précédemment traité, ce qui nous permet d'écrire $H + N = (\exp \operatorname{ad} X)(H) + N' + Z$ sous la forme $(\exp \operatorname{ad} Y)(\exp \operatorname{ad} X)(H) + N''$ où Y et N'' sont deux éléments de $\mathfrak{N}$ tels que le crochet $[(\exp \operatorname{ad} Y)(\exp \operatorname{ad} X)(H), N'']$ soit nul, ou encore (chap.1-3), $H + N = (\exp \operatorname{ad} T)(H) + N''$ avec $T \in \mathfrak{N}$ et $[(\exp \operatorname{ad} T)(H), N''] = 0$.

Lemme 3.

Toute algèbre d'endomorphismes réductive pour sa représentation identique contient les composantes semi-simples et nilpotentes de ses éléments.

Démonstration :

Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ une telle algèbre dont $\mathfrak{C}$ est le centre et $\mathfrak{S}$ l'idéal dérivé. Les éléments du centre de $\mathfrak{h}$ sont des endomorphismes semi-simples (chap.1-2). Tout élément X de $\mathfrak{h}$ se met donc sous la forme $X = C + S = C + S_S + S_N$, et la semi-simplicité de $\mathfrak{S}$ nous permet d'affirmer que les composantes semi-simple et nilpotente S_S et S_N de S appartiennent à $\mathfrak{S}$ (chap.1-4). La somme $C + S_S$ de deux endomorphismes semi-simples qui commutent entre eux est semi-simple. D'autre part, elle commute avec S_N . Nous en déduisons que les endomorphismes $(C + S_S)$ et S_N sont respectivement la composante semi-simple et la composante nilpotente de X .

Démonstration du théorème 1.

■ (a) ⇒ b)).

Un élément X de $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{h}$ peut se mettre sous la forme $X = N + H = N + H_N + H_S$, où N est un élément de $\mathfrak{N}_0$ et où H_S et H_N désignant respectivement les composantes semi-simple et nilpotente de l'élément H de $\mathfrak{h}$. Ces dernières appartiennent à $\mathfrak{h}$

d'après le lemme 3. Puisque $\mathfrak{N}_0$ est un idéal de $\mathfrak{G}$, nous sommes dans les conditions d'applications du lemme 1. Nous en déduisons que $N + H_N$ est un endomorphisme nilpotent. La sous-algèbre $kH_N + \mathfrak{N}_0$ de $\mathfrak{G}$ étant composée d'endomorphismes nilpotents est nilpotente. Il s'en suit que le lemme 2 s'applique à la sous-algèbre $kH_S + (\mathfrak{N}_0 + kH_N)$. Nous pouvons donc trouver deux éléments N' et Y dans $kH_N + \mathfrak{N}_0$ tels que l'on ait $H = H_S + (H_N+N) = (\exp \operatorname{ad} Y)(H_S) + N'$, avec $[(\exp \operatorname{ad} Y)(H_S), N'] = 0$.

■ (b) ⇒ a)).

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes qui contient les composantes semi-simples et nilpotentes de ses éléments, et soit $\mathfrak{H} = \mathfrak{C} + \mathfrak{S}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ réductive maximale relativement à la représentation identique de $\mathfrak{G}$, dont $\mathfrak{C}$ soit le centre et $\mathfrak{S}$ l'idéal dérivé. L'algèbre $\mathfrak{G}$ est un $\mathfrak{H}$-module semi-simple (chap.1-2), dont le radical $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{N}_0$ sont des sous-$\mathfrak{H}$-modules. Il en résulte une décomposition $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}_0$ où $\mathfrak{M}$ est un sous-$\mathfrak{H}$-module. Nous avons $[\mathfrak{M},\mathfrak{H}] \subset \mathfrak{M}$ et $[\mathfrak{M},\mathfrak{H}] \subset [\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \cap \mathfrak{R} \subset \mathfrak{N}_0$ (chap.1-1). Le sous-$\mathfrak{H}$-module $\mathfrak{M}$ est donc trivial. Supposons qu'il existe un élément M dans $\mathfrak{M}$ dont la composante semi-simple M_S n'appartienne pas à $\mathfrak{H}$. La composante semi-simple de $\operatorname{ad} M$ est $\operatorname{ad} M_S$ et elle s'exprime sous la forme d'un polynôme sans terme constant en $\operatorname{ad} M$. Le $\mathfrak{H}$-module $\mathfrak{M}$ est trivial : nous en déduisons que le crochet $[M_S,\mathfrak{H}]$ est nul, donc que $\mathfrak{H} + kM_S$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ réductive relativement à la représentation identique de $\mathfrak{G}$, qui contient strictement $\mathfrak{H}$. Ceci nous permet d'affirmer que les composantes semi-simples des éléments de $\mathfrak{M}$ appartiennent au centre $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{H}$, donc au radical de $\mathfrak{G}$ d'après le théorème de Mostow et (chap.2, § 2, th.1) et (chap.1-3). Il s'en suit que les composantes nilpotentes des éléments de $\mathfrak{M}$ appartiennent également au radical de $\mathfrak{H}$, donc à $\mathfrak{N}_0$ (chap.1-1). Ainsi, $\mathfrak{M}$ est contenu dans $\mathfrak{C} + \mathfrak{N}_0$, et $\mathfrak{G}$ admet la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{C} + \mathfrak{S} = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{H}$.

§ 2 - ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES RELATIVEMENT A UNE REPRESENTATION DONNEE.

Définition 2.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ qui admet une représentation ρ sera dite presque-algébrique relativement à cette dernière ou plus brièvement ρ-PRESQUE-ALGEBRIQUE, si $\rho(\mathfrak{G})$ est une algèbre de Lie presque-algébrique d'endomorphismes.

Nous nous proposons maintenant de caractériser de telles algèbres.

Proposition 1.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, ρ une représentation de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{N}_\rho$ le plus grand idéal de nilpotence de $\mathfrak{G}$ relativement à ρ. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathfrak{G}$ admet la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_\rho + \mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$, réductive maximale relativement à la représentation ρ.

b) Pour tout élément X de $\mathfrak{G}$, il existe deux éléments S et N dans $\mathfrak{G}$ tels que $\rho(S)$ soit la composante semi-simple de $\rho(X)$ et $\rho(N)$ sa composante nilpotente.

Remarque.

Dans la proposition 1, l'intersection de $\mathfrak{N}_\rho$ et de $\mathfrak{H}$ est égale au noyau de la représentation ρ quel que soit le choix de la sous-algèbre $\mathfrak{H}$ ρ-réductive maximale.

Démonstration de la proposition 1.

■ (a) ⇒ b)).

Si $\mathfrak{G}$ vérifie les conditions de a), nous avons la décomposition $\rho(\mathfrak{G}) = \rho(\mathfrak{N}_\rho) + \rho(\mathfrak{H})$. L'idéal $\rho(\mathfrak{N}_\rho)$ de $\rho(\mathfrak{G})$ étant composé

d'endomorphismes nilpotents est contenu dans $\mathfrak{N}_0$, plus grand idéal de nilpotence de l'algèbre $\rho(\mathfrak{G})$ relativement à sa représentation identique. Nous pouvons donc écrire $\rho(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}_\rho + \rho(\mathfrak{H})$ où $\rho(\mathfrak{H})$ est réductive relativement à la représentation identique de $\rho(\mathfrak{G})$. Le théorème 1 du paragraphe 1 de ce même chapitre nous permet de conclure.

■ (b) ⇒ a)).

Si maintenant $\mathfrak{G}$ vérifie les conditions de b), son image par ρ est une algèbre de Lie presque-algébrique d'endomorphismes, qui peut donc se mettre sous la forme $\rho(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{H}'$ si $\mathfrak{N}_0$ désigne encore le plus grand idéal de nilpotence de $\rho(\mathfrak{G})$ relativement à sa représentation identique et où $\mathfrak{H}'$ est une sous-algèbre de $\rho(\mathfrak{G})$ réductive relativement à cette même représentation. Nous avons l'égalité $\mathfrak{G} = \rho^{-1}(\rho(\mathfrak{G})) = \rho^{-1}(\mathfrak{N}_0) + \rho^{-1}(\mathfrak{H}')$. La sous-algèbre $\rho^{-1}(\mathfrak{H}')$ de $\mathfrak{G}$ est ρ-réductive, puisque son image par ρ , $\rho(\rho^{-1}(\mathfrak{H}')) = \mathfrak{H}'$, est réductive relativement à la représentation identique de l'algèbre d'endomorphismes $\rho(\mathfrak{G})$. L'idéal $\rho^{-1}(\mathfrak{N}_0)$ de $\mathfrak{G}$ étant composé d'éléments ayant une image par ρ nilpotente est contenu dans $\mathfrak{N}_\rho$, d'où le résultat.

Proposition 2.

Soient k_1 une extension commutative de k , $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, ρ une représentation de $\mathfrak{G}$. Soient $\mathfrak{G}(k_1)$ (resp. $\rho(k_1)$) l'algèbre de Lie (resp. la représentation) obtenue par extension du corps de base. Si $\mathfrak{G}$ est ρ-presque-algébrique, $\mathfrak{G}(k_1)$ est $\rho(k_1)$-presque algébrique.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate de (chap.1 -5).

§ 3 - ETUDE DES ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES

Définition 3.

Une algèbre de Lie sera dite PRESQUE-ALGEBRIQUE si elle est presque-algébrique relativement à sa représentation adjointe.

La proposition suivante est un cas particulier de la proposition 1 du paragraphe précédent.

Proposition 2.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{N}$ son plus grand idéal nilpotent. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a) $\mathfrak{G}$ admet la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + \mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{G}$ maximale.

b) Pour tout élément X de $\mathfrak{G}$, il existe deux éléments S et N dans $\mathfrak{G}$ tels que $\operatorname{ad} S$ soit la composante semi-simple de $\operatorname{ad} X$, $\operatorname{ad} N$ sa composante nilpotente et $[S,N]$ appartienne au centre de $\mathfrak{G}$.

Remarque 1.

Dans la proposition 2 , l'intersection de $\mathfrak{N}$ et de $\mathfrak{H}$ est égale au centre de $\mathfrak{H}$, quel que soit le choix de la sous-algèbre $\mathfrak{H}$, réductive dans $\mathfrak{G}$ maximale.

Définition 4.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$. On dira que $\mathfrak{H}$ est PRESQUE-ALGEBRIQUE dans $\mathfrak{G}$, si elle est presque-algébrique relativement à la représentation $X \mapsto \operatorname{ad}_{\mathfrak{G}} X$ de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$.

Remarque 2.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$. Si $\mathfrak{H}$ est presque-algébrique dans $\mathfrak{G}$, elle est elle-même presque-algébrique.

Proposition 3.

Tout quotient d'une algèbre de Lie presque-algébrique est presque-algébrique.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate de la définition 4 et du fait que si $\mathfrak{G}$ est un morphisme surjectif d'une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{G}'$ et si X est un élément de $\mathfrak{G}$ tel que $ad_{\mathfrak{G}}X$ soit semi-simple (resp. nilpotent) $ad_{\mathfrak{G}'}f(X)$ est semi-simple (resp. nilpotent).

Proposition 4.

Soient $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$, n algèbres de Lie et $\mathfrak{G}'_1, \mathfrak{G}'_2, \ldots, \mathfrak{G}'_n$ des sous-algèbres de $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ respectivement. Une condition nécessaire et suffisante pour que la sous-algèbre $\mathfrak{G}'_1 \times \mathfrak{G}'_2 \ldots \times \mathfrak{G}'_n$ soit presque-algébrique dans $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_n$ est que $\mathfrak{G}'_i$ soit presque-algébrique dans $\mathfrak{G}_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que pour qu'un élément $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_n$ soit tel que $ad_{\mathfrak{G}}X$ soit semi-simple (resp. nilpotent), il faut et il suffit que $ad_{\mathfrak{G}_i}(X_i)$ soit semi-simple (resp. nilpotent) pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Corollaire 1.

Pour que l'algèbre de Lie $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_n$ soit presque-algébrique, il faut et il suffit que $\mathfrak{G}_i$ soit presque-algèbrique pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Proposition 5.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie presque-algébrique. Si $\mathfrak{P}$ est une partie de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{A}$ un idéal de $\mathfrak{G}$, les éléments X de $\mathfrak{G}$ tels que $(ad_{\mathfrak{G}}X)(\mathfrak{P})$ soit contenu dans $\mathfrak{A}$ constituent une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ presque-algébrique dans $\mathfrak{G}$.

Le normalisateur et le centralisateur de toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ sont des sous-algèbres presque-algébriques dans $\mathfrak{G}$.

Démonstration.

En effet, si l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est presque-algébrique, tout endomorphisme de $\mathfrak{G}$ de la forme $\operatorname{ad} X$, où X est un élément de $\mathfrak{G}$, se met sous la forme $\operatorname{ad} X = \operatorname{ad} S + \operatorname{ad} N$, où $\operatorname{ad} S$, composante semi-simple de $\operatorname{ad} X$ et $\operatorname{ad} N$, composante nilpotente de $\operatorname{ad} X$ sont des fonctions polynomiales sans termes constants de $\operatorname{ad} X$. Donc, si $\operatorname{ad} X(\mathfrak{P})$ est contenu dans un idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{G}$, il en est de même de $\operatorname{ad} S(\mathfrak{P})$ et de $\operatorname{ad} N(\mathfrak{P})$. On démontre de manière analogue la seconde partie de la proposition.

Lemme 4.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{N}$ son plus grand idéal nilpotent et $\mathfrak{A}$ un idéal de $\mathfrak{G}$. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{A}$ est $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$.

Démonstration.

Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des éléments de $\operatorname{rad}(\mathfrak{A}) = \operatorname{rad}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{A}$ tels que $ad_{\mathfrak{A}}(X)$ soit nilpotent (chap.1-1). Mais pour un élément X de $\mathfrak{A}$, $ad_{\mathfrak{A}}(X)$ est nilpotent si et seulement si $ad_{\mathfrak{A}}(X)$ l'est. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{A}$ peut donc se définir comme l'ensemble des éléments X de $\operatorname{rad}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{A}$ tels que $ad_{\mathfrak{G}}(X)$ soit nilpotent. Il est donc contenu dans $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$, qui est un idéal nilpotent de $\mathfrak{A}$. D'où l'égalité cherchée.

Proposition 6.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{N}$ son plus grand idéal nilpotent et $\mathfrak{U}$ un idéal de $\mathfrak{G}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{U}$ soit presque-algébrique dans $\mathfrak{G}$ est que l'on ait l'égalité $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} + \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}$ est une quelconque sous-algèbre de $\mathfrak{G}$, réductive maximale dans $\mathfrak{G}$.

Démonstration.

Il est clair que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Si l'idéal $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{G}$ est presque-algébrique dans $\mathfrak{G}$, il peut se mettre sous la forme $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} + \mathfrak{H}'$, où $\mathfrak{H}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{U}$ réductive dans $\mathfrak{G}$ maximale (lemme 4 de ce même paragraphe). On peut trouver une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ réductive maximale dans $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}$. Si $\mathfrak{H}_1$ désigne une autre sous-algèbre réductive maximale dans $\mathfrak{G}$, on a $\exp \operatorname{ad}(X)(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_1$ pour un élément X de $\operatorname{rad}^{\infty}(\mathfrak{G})$ (chap. 2, § 2, th. 1). On en déduit l'égalité $\mathfrak{U} = \exp \operatorname{ad}(X)(\mathfrak{U}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} + \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{U}$.

Corollaire.

Tout idéal d'une algèbre de Lie presque-algébrique $\mathfrak{G}$ qui contient le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$ est presque-algébrique dans $\mathfrak{G}$.

On peut se demander si tout idéal d'une algèbre de Lie presque-algébrique est lui-même presque-algébrique. Il n'en est rien. En effet, considérons dans l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel M deux éléments non nuls S et N respectivement semi-simple et nilpotent tels que $[S,N] = 0$. Formons le produit semi-direct de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G} = kS + kN$ et de l'algèbre de Lie abélienne ayant M pour espace vectoriel sous-jacent. C'est une sous-algèbre presque-algébrique dont $k(S+N) \times M$ est un idéal non presque-algébrique.

Proposition 7.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre de Lie soit presque-algébrique est que son radical le soit.

Démonstration.

Que la condition soit nécessaire est une conséquence immédiate du corollaire de la proposition 6. Montrons qu'elle est suffisante. Soit pour cela $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie dont le radical $\mathfrak{R}$ est presque-algébrique. Soit $\mathfrak{C}$ une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{R}}$-réductive maximale de $\mathfrak{R}$. Il existe donc une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{R}}$-réductive maximale qui contient $\mathfrak{C}$. Le radical de $\mathfrak{H}$ est $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{R}$ (chap.2, § 1, th.1 et chap.1-3), c'est une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{R}}$-réductive de $\mathfrak{R}$ qui contient $\mathfrak{C}$ (chap.1-1). Donc $\mathfrak{C}$ est le radical de $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{S}$ une sous-algèbre semi-simple maximale de $\mathfrak{H}$, on a $\mathfrak{H} = \mathfrak{C} + \mathfrak{S}$. L'idéal $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{H}$ est un $\mathfrak{S}$-module réductif (chap.1-2). Il admet donc la décomposition $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{\mathfrak{S}} \oplus [\mathfrak{S},\mathfrak{C}]$, où $\mathfrak{C}^{\mathfrak{S}}$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathfrak{C}$ invariants par l'action de $\mathfrak{S}$. Les éléments de $[\mathfrak{S},\mathfrak{C}]$ appartiennent au radical nilpotent $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \cap \mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ donc au plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{G}$. Le fait que $\mathfrak{R}$ soit presque-algébrique et le lemme 4, nous permettent d'en déduire l'égalité $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + \mathfrak{C} + \mathfrak{S} = \mathfrak{N} + (\mathfrak{C}^{\mathfrak{S}} + \mathfrak{S})$. On remarque que $\mathfrak{C}^{\mathfrak{S}} + \mathfrak{S}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ réductive telle que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}} X$ soit semi-simple pour tout élément de son centre $\mathfrak{C}^{\mathfrak{S}}$. Donc, $\mathfrak{G}$ est presque-algébrique (chap.1-2).

§ 4 - THEOREME D'ADO ET ALGEBRES DE LIE PRESQUE-ALGEBRIQUES

Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe que toute algèbre de Lie presque-algébrique est isomorphe à une algèbre de Lie d'endomorphismes presque-algébrique. Nous nous appuierons sur la démonstration du théorème d'Ado qui est donné dans ([3]).

Théorème 1. (Variante du théorème d'Ado)

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie presque-algébrique, $\mathfrak{N}$ son plus grand idéal nilpotent. Il existe une représentation fidèle ρ de $\mathfrak{G}$ telle que :

a) $\rho(\mathfrak{N})$ soit composé d'endomorphismes nilpotents ;

b) $\rho(\mathfrak{G})$ soit une algèbre de Lie d'endomorphismes presque-algébrique.

Ainsi donc, toute algèbre de Lie presque-algébrique est isomorphe à une algèbre de Lie d'endomorphismes presque-algébrique.

Dans la démonstration de ce théorème, nous allons nous borner à indiquer les modifications nécessaires dans la démonstration que donne Bourbaki du théorème d'Ado (3).

Nota. Dans ce paragraphe, nous aurons à considérer des modules de dimension infinie. Nous dirons qu'un tel module est semi-simple s'il est somme directe de modules simples de dimension finie.

1. COEFFICIENTS D'UNE REPRESENTATION.

Définition 1.

Soient $\mathfrak{U}$ une algèbre associative unitaire et ρ une représentation de $\mathfrak{U}$ dans un espace vectoriel M. A tout couple (m,m') du produit cartésien de M et de son dual M^*, on peut faire correspondre un

élément $\theta(m,m')$ du dual $\mathfrak{U}^*$ de $\mathfrak{U}$ en posant $\theta(m,m')(U) = m'((U)(m))$ pour tout $U \in \mathfrak{U}$. Un tel élément $\theta(m,m')$ est appelé coefficient de la représentation ρ.

Remarque 1.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, ρ une représentation de $\mathfrak{G}$ dans un espace vectoriel M de dimension m et $\mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$. Le $\mathfrak{G}$-module M est isomorphe à un sous-$\mathfrak{G}$-module de $(\mathfrak{C}(\rho))^m$, où $\mathfrak{C}(\rho)$ est le sous-espace vectoriel du dual de $\mathfrak{U}$ engendré par les coefficients de la représentation ρ ([3], § 7-1).

2. LE THEOREME D'AGRANDISSEMENT.

Soient $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{G}'$ une algèbre de Lie, somme d'un idéal $\mathfrak{G}'$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}'$.

Il existe une structure de $\mathfrak{G}$-module et une seule sur $\mathfrak{U}'$ telle que :

a) pour tout X dans $\mathfrak{G}'$ et pour tout U dans $\mathfrak{U}'$, $X_{\mathfrak{U}'}U = -UX$;

b) pour tout X dans $\mathfrak{H}$ et pour tout U dans $\mathfrak{U}'$, $X_{\mathfrak{U}'}U = XU - UX$ ([3], § 7-2).

Par la suite, sous de telles hypothèses, $\mathfrak{U}'$ sera supposé muni de cette structure de $\mathfrak{G}$-module.

Définition 2.

Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{G}'$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$, ρ' une représentation de $\mathfrak{G}'$ dans un espace vectoriel M' de dimension finie. Une représentation ρ de $\mathfrak{G}$ dans un espace vectoriel M de dimension finie est appelée un agrandissement de ρ' à $\mathfrak{G}$ s'il existe un

homomorphisme injectif du $\mathfrak{G}'$-module M' dans le $\mathfrak{G}'$-module M. On dit aussi que le $\mathfrak{G}$-module M est un agrandissement du $\mathfrak{G}'$-module M'.

Nous devons préciser l'énoncé du théorème de Zassenhaus.

Théorème 2. (Théorème d'agrandissement)

Soient $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{H}$ une algèbre de Lie, somme directe d'un idéal $\mathfrak{G}'$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{H}$, et ρ' une représentation de $\mathfrak{G}'$ de dimension finie, dont le plus grand idéal de nilpotence contient $[\mathfrak{H},\mathfrak{G}']$.

a) Il existe un agrandissement ρ de ρ' à $\mathfrak{G}$ dont le plus grand idéal de nilpotence contient celui de ρ'.

b) Si, pour tout X dans $\mathfrak{H}$, la restriction à $\mathfrak{G}'$ de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}X$ est nilpotente, on peut choisir ρ de façon à ce qu'en outre le plus grand idéal de nilpotence de ρ contienne $\mathfrak{H}$.

c) Si un élément X de $\mathfrak{H}$ est tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}X$ soit semi-simple, alors $\rho(X)$ est semi-simple.

d) Si un élément X de $\mathfrak{G}'$ est tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}X$ et $\rho'(X)$ soient semi-simple, alors $\rho(X)$ est semi-simple.

Ce théorème diffère du théorème de Zassenhaus tel qu'il est donné dans [3] par l'adjonction des assertions c) et d).

Lemme 1.

Soient $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{G}'$ une algèbre de Lie, somme d'un idéal $\mathfrak{G}'$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}'$. Si un élément X de $\mathfrak{H}$ est que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}X$ soit semi-simple, $X_{\mathfrak{U}'}$ est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{U}'$ et $-{}^{t}X_{\mathfrak{U}'}$, un endomorphisme semi-simple du dual $(\mathfrak{U}')^{*}$ de $\mathfrak{U}'$.

Démonstration.

Soit X un élément de $\mathfrak{H}$ tel que $ad_{\mathfrak{G}}X$ soit semi-simple. L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est par hypothèse un X-module semi-simple. L'action qui s'en déduit de X sur $T(\mathfrak{G})$, algèbre tensorielle de $\mathfrak{G}$ donne un X-module semi-simple (chap.1-2). L'idéal $\mathfrak{J}$ de $T(\mathfrak{G})$, engendré par les éléments de la forme $[X,Y] - X.Y+Y.X$, où X et Y sont des éléments de $\mathfrak{G}$, est un sous-X-module de $T(\mathfrak{G})$. L'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{G}$ - quotient du X-module $T(\mathfrak{G})$ par son sous-X-module $\mathfrak{J}$ - est donc un X-module semi-simple dont $\mathfrak{U}'$ est un sous-X-module

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 2.

Rappelons brièvement comment l'on construit un agrandissement satisfaisant les conditions a) et b). On considère $\mathfrak{C}(\rho')$, sous-espace vectoriel du dual $(\mathfrak{U}')^*$ de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{G}'$, puis le sous-$\mathfrak{G}$-module de $(\mathfrak{U}')^*$ engendré par $\mathfrak{C}(\rho')$. On vérifie alors que le $\mathfrak{G}$-module $\mathfrak{S}^n$, où n est la dimension de la représentation ρ' répond à la question.

L'assertion c) résulte aussitôt du lemme 1.

Prouvons l'assertion d). Par hypothèse, $\rho'(X)$ est un endomorphisme semi-simple de M . On en déduit que la multiplication à droite par $\rho'(X)$ est un endomorphisme semi-simple de $End(M)$. La transposée ${}^t\rho'$ de ρ' est une application linéaire de $(End\ M)^*$ dans $(\mathfrak{U}')^*$. Elle n'est autre que l'application de $M \otimes M^*$ dans $(\mathfrak{U}')^*$ déduite de θ (1., déf.1) après l'identification habituelle de $(End\ M)^*$ à $M \otimes M^*$. Son image $\mathfrak{C}$ est donc le sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{U}')^*$ engendré par les coefficients de ρ' . Il est d'autre part facile de voir que ${}^t\rho'$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}'$-modules. On en déduit que $\mathfrak{C}$ est laissé stable par $\mathfrak{G}'$, et que l'action de X sur $\mathfrak{C}$ est semi-simple.

Considérons maintenant le produit tensoriel $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{C}$, c'est un $\mathfrak{G}'$-module, puisque - nous venons de le voir - $\mathfrak{C}$ en est un et qu'il en est de même pour $\mathfrak{U}$, ceci grâce à la représentation $X \mapsto (U \mapsto XU - UX)$ de $\mathfrak{G}'$ dans $\mathfrak{U}$. D'autre part, l'action de X sur $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{C}$ étant semi-simple, il en est de même de l'action de X sur le produit tensoriel $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{C}$. L'application de $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{S}$, qui associe à tout élément décomposable $Y \otimes C$ l'élément $-CY$ est un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{G}'$-modules. On en déduit que l'action de X sur $\mathfrak{S}$ est semi-simple.

C.Q.F.D.

3. PREUVE DU THEOREME 1.

Remarque 2.

Toute algèbre de Lie presque-algébrique peut se mettre sous la forme $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{S}$, où $\mathfrak{N}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ une sous-algèbre abélienne du radical de $\mathfrak{G}$ telle que, pour tout X dans $\mathfrak{C}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}} X$ soit un endomorphisme semi-simple, et $\mathfrak{S}$ une sous-algèbre supplémentaire du radical de $\mathfrak{G}$ telle que $[\mathfrak{S},\mathfrak{C}] = 0$.

Nous modifions comme suit la proposition 1 de Bourbaki ([3], § 7) :

Proposition 1.

Avec les notations que l'on vient d'utiliser dans la remarque 2, soit $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{S}$ une algèbre de Lie presque-algébrique. Soient $\mathfrak{A}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$ et ρ une représentation de $\mathfrak{A}$ telle que tout élément de $\rho(\mathfrak{A})$ soit nilpotent. Alors ρ admet un agrandissement σ à $\mathfrak{G}$ tel que $\sigma(X)$ soit nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{N}$ et semi-simple pour tout $X \in \mathfrak{C}$.

Démonstration.

Les assertions a) et b) du théorème 2 (3.) et le fait que $\mathfrak{A}$ soit une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{N}$ (chap.1-1), permettent de trouver un agrandissement de ρ à $\mathfrak{N}$.

Nous pouvons alors mettre en évidence une suite $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{R}_q = \mathfrak{R}$ de sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ telles que $\mathfrak{R}_{i-1} + kX_i = \mathfrak{R}_i$, où X_i est un élément de $\mathfrak{C}$. Puis, toujours à l'aide des assertions a) et b) du théorème 2 (3.), il est possible de construire de proche en proche des agrandissements $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_q = \rho'$ de ρ' à $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_q = \mathfrak{R}$ tels que tout élément de $\rho''(\mathfrak{N})$ soit nilpotent, et grâce aux assertions c) et d) du théorème 2, tels que $\rho''(X_i)$ soit semi-simple pour $1 \leq i \leq q$. En effet, prenons pour les ρ_i $(1 \leq i \leq q)$ les agrandissements que nous procure la démonstration du théorème 2. La condition c) nous permet de dire pour tout i compris entre 1 et q, que puisque $\mathrm{ad}_{\mathfrak{R}_i}(X_i)$ est semi-simple, $\rho'_i(X_i)$ est semi-simple, et la condition d) que, pour $j < i$, puisque $\mathrm{ad}_{\mathfrak{R}_i}(X_j)$ est semi-simple, si $\rho'_{i-1}(X_j)$ est semi-simple, il en est de même de $\rho_i(X_j)$. La sous-algèbre $\mathfrak{C}$ étant abélienne, tous les éléments de $\rho''(\mathfrak{C})$ sont des endomorphismes semi-simples.

Nous pouvons poursuivre le raisonnement, en utilisant le théorème 2 du 2., et établir ainsi l'existence d'un prolongement σ de ρ'' à $\mathfrak{G}$ toute entière tel que $\sigma(X)$ soit nilpotent pour tout élément X de $\mathfrak{N}$, et semi-simple pour tout élément X de $\mathfrak{C}$.

C.Q.F.D.

Passons à la démonstration proprement dite du théorème 1.

Démonstration. (Théorème 1)

Soit $\mathfrak{Z}$ le centre de $\mathfrak{G}$. Il admet une représentation fidèle σ, telle que tout élément de $\sigma(\mathfrak{Z})$ soit nilpotent. La proposition 1 nous fournit un agrandissement σ_1 de σ à $\mathfrak{G}$ tel que $\sigma_1(\mathfrak{N})$ soit

formé d'opérateurs nilpotents. Il est clair que l'intersection du noyau de σ_1 et de $\mathfrak{H}$ est nulle. Donc, $\rho = \sigma_1 + \sigma_2$, où σ_2 est la représentation adjointe de $\mathfrak{G}$ est une représentation fidèle de $\mathfrak{G}$. On voit que $\rho(\mathfrak{N})$ est formé d'endomorphismes nilpotents, $\rho(\mathfrak{C})$ d'opérateurs semi-simples, donc que $\rho(\mathfrak{G}) = \rho(\mathfrak{N}) + \rho(\mathfrak{C}) + \rho(\mathfrak{S})$ est une algèbre d'endomorphismes presque-algébrique d'après la définition 1 du paragraphe 1.

C.Q.F.D.

oo00oo

BIBLIOGRAPHIE

[1] - AUSLANDER L. and BREZIN J. "Almost Algebraic Lie Algebras". J. of Algebra, 8, 1958, p. 295-313.

[2] - BOURBAKI N. "Algèbre". Chapitre 8, Hermann, 1958.

[3] - BOURBAKI N. "Groupes et Algèbres de Lie". Chapitre 1, Algèbres de Lie, Hermann, 1960.

[4] - CHEVALLEY C. "Théorie des Groupes de Lie". Hermann, Paris, 1968.

[5] - CHEVALLEY C. and EILENBERG S. "Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras". Trans. Amer. Math. Soc., 74, 1953, p. 110-134.

[6] - JACOBSON N. "Lie Algebras". Interscience Publishers, 1962.

[7] - HOCHSCHILD G. "The Stucture of Lie Groups". Holden Day, 1965.

[8] - MOSTOW G.D. "Fully Reductible Subgroups of Algebraic Groups". Am. J. Math., 78, 1956, p. 201-221.

[9] - PUKANSZKY L. "Leçons sur les représentations des groupes". Dunod, Paris, 1967.

[10] - SERRE J.P. "Lie Algebras and Lie Groups". W.A. Benjamin, Inc., New-York, Amsterdam, 1965.

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémélogie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULLIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies Infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VPOUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUB Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

B. MALGRANGE

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale,

M. SOUTIF